398. Linear Operation ニツイテ(II)

泉　信一（東北大）

北川敏男（阪大）

本論文ノ目的ハ $(-\infty, \infty)$ ニ於テ定義サレタ函数ノ或ル空間デ定義サレタ linear デ且ツ translation ト可換ナ

ル operation ノ一般ノ形ヲ求メルコトデアル。

1. (F_κ) ヲ $(-\infty, \infty)$ ニ於テ定義サレタ函数ノ空間デ，各々ノ $f \varepsilon (F_\kappa)$ ニ對シテ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x)|}{1+|x|^\kappa}\, dx < \infty$$

トスル，更ニ $K(\xi)$ ヲ $(-\infty, \infty)$ ニ於テ定義セラレタ函数トシ，且ツ

$$|K(\xi)| \leqq \frac{A}{1+|\xi|^K}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi)\, d\xi = 1$$

トスル．然ルトキ

$$f_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{\xi}{\lambda}\right) K(\xi)\, d\xi \qquad (1)$$

が存在スル。

Bochner ニヨリ

$$f(x) = (K) \underset{\lambda \to \infty}{l.m.} f_\lambda(x) \qquad (2)$$

コノ式ノ意味ハ

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f_\lambda(x) - f(x)|}{1+|x|^K}\, dx = 0^{(1)}$$

今

$$\|f\| = \|f(x)\| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x)|}{1+|x|^\kappa}\, dx$$

---

(1) Bochner. Fouriersche Integrale. Izumi. On the generaliged Fourier Integrals, I. 東北大学理科報告, 1934, Lemma 13 參照.

トオクトキ，(F_K) ハ Banach ノ意味ニ於ケル normalized space ニナル。[1]

従ッテ (K) l.m. ナル limit ハ空間 (F_K) ニオケル距離ニ関スル limit ニナル。

2. 次ニ各々ノ $f(x)\varepsilon(\mathrm{F}_K)$ ヲ $g(x)\varepsilon(\mathrm{F}_K)$ ニ変換スル linear translatable operation

$$g(x)=\Lambda(f(x))=\Lambda\{x, f(t)\}$$

ヲ考ヘル．Λf ガ更ニ次ノ二ツノ條件ヲ満足スルトスル．乃チ

條件 1° 任意ノ $f\varepsilon\mathrm{E}$ 及ビ殆ンドスベテノ t ニ對シテ

$$|\Lambda\{t, f(x)\}|\leqq G|f(t)|$$

トナル様ナ $G>0$ ガ存在スル。

---

(1) $K>1$ ノトキ (F_K) ハ normalized デアルノミナラズ，type (B) ノ space ニナル．何トナレバ

$$\lim_{m,n\to\infty}\|f_m-f_n\|=\lim_{m,n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f_m(x)-f_n(x)|}{1+|x|^K}\,dx=0.$$

トナルトキ，$\{f_m(x)\}$ ハ convergent in measure デアル．

故ニ任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シテ

$$\lim_{n\to\infty} m\mathrm{E}_\varepsilon=\lim_{n\to\infty} m\,\mathop{\mathrm{E}}_{x}\left(|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\right)=0$$

トナル様ナ $f(x)\varepsilon(\mathrm{F}_K)$ ガ存在スル．カヽル $f(x)$ ニ對シテ

$$\|f_n-f\|\leqq\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|x|^K}\,dx+\int_{\mathrm{E}_\varepsilon}\frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|x|^K}\,dx$$

故ニ $\|f_n-f\|\to 0$.

故ニ (F_K) ハ complete デアル。

條件2°. $\Lambda\{x, \text{区}(-\lambda t)\} = \angle_\lambda(x)$ トオクトキ

$$|\angle_\lambda(x)| \leqq \frac{A}{1+|x|^k}$$

コヽニ，A ハ λ ニダケ関係スルモノトスル。

3. 次ニカヽル Λf ノ一般ノ形ヲ求メヨウ.

Λf ハ（上述ノ意味デ）*linear* デアリ，*bounded* デアルカラ．(2) カラ

$$\Lambda f = (k)\ \underset{\lambda\to\infty}{l.i.m.}\ \Lambda f_\lambda \qquad (3)$$

然ルニ、(1) カラ

$$\begin{aligned}\Lambda f_\lambda &= \Lambda\{x, f_\lambda(t)\}\\ &= \Lambda\left\{x, \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t+\frac{\xi}{\lambda}\right)\text{区}(\xi)\,d\xi\right\}\\ &= \Lambda\left\{x, \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\,\text{区}\big(\lambda(\eta-t)\big)\,d\eta\right\}\end{aligned}$$

今，殆ンドスベテノ t ニ對シテ

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(\eta)\,\text{区}\big(\lambda(\eta-t)\big)\,d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\,\text{区}\big(\lambda(\eta-t)\big)\,d\eta$$

ナルヤウナ *step-function* ノ *sequence* $\{f_n(\eta)\}$ ヲトルトキ條件1° カラ

$$\Lambda\left\{x, \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\,\text{区}\big(\lambda(\eta-t)\big)\,d\eta\right\} = \lim_{n\to\infty}\Lambda\left\{x, \int_{-\infty}^{\infty} f_n(\eta)\,\text{区}\big(\lambda(\eta-t)\big)\,d\eta\right\}$$

ガ殆ンドスベテノ x ニ對シテ成立スル。然ルニ $f_n(\eta)$ ハ *step-function* デアルカラ條件1°及ビ2°及ビ(I)ノ定理2カラ Λ ト *integration* トノ順序ヲ交換出來テ

$$\Lambda f_{\lambda}=\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\,\Lambda\left\{x, \text{区}\left(\lambda(\eta-t)\right)\right\} d\eta$$

然ルニ Λf ハ *translatable* デアルカラ，

$$\begin{aligned}\Lambda\left\{x, \text{区}\left(\lambda(\eta-t)\right)\right\} &= \Lambda\left(\text{区}\left(\lambda(\eta-t)\right)\right)\\ &= \Lambda\left(T_{\lambda\eta}\,\text{区}(-\lambda t)\right)\\ &= T_{\lambda\eta}\Lambda\left(\text{区}(-\lambda t)\right)=\angle_{\lambda}(x+\lambda\eta).\end{aligned}$$

但シ，コヽニ T_a ハ $f(x)$ カラ $f(x+a)$ ヲウル *Operation*

即チ *translation* ヲ表ハス。

故ニ

$$\Lambda f_{\lambda}=\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\,\angle_{\lambda}(x+\lambda\eta)\,d\eta$$

故ニ (3) カラ

$$\Lambda f(x)=(k)\,\underset{\lambda\to\infty}{l.m.}\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\,\angle_{\lambda}(x+\lambda\eta)\,d\eta.$$

之レ即チ求ムル一般形デアル。